

## ISOMETRIC AND ISOMETRIC- $m$ OPERATORS

Gunawan

Universitas Muhammadiyah Purwokerto

Email: [gun.oge@gmail.com](mailto:gun.oge@gmail.com)

### Abstract

*This paper presents the definition, samples, and natures of isometric and isometric-  $m$  algebra operator for some  $m \in \mathbb{N}$  in Hilbert space. In additions, the relationship of both operators will also be examined. To investigate natures of isometric and isometric-  $m$  operators, adjoint operators concepts and natures are required. Adjoint operator concept underlies isometric operator's natures. Later, according to the concept, isometric operator is expanded into isometric-  $m$  operators for some  $m \in \mathbb{N}$  in Hilbert space. The result unveils algebra natures of isometric and isometric-  $m$  operators consisting of composition operators natures and multiplication with scalar. Furthermore, if  $T$  operators is isometric then  $T$  operators isometric-  $m$  for some  $m \in \mathbb{N}$ .*

**Keywords:** adjoint operators, isometric operators, isometric-  $m$  operators.

### PENDAHULUAN

Di dalam analisis khususnya analisis fungsional, beberapa ruang yang sering dibicarakan adalah ruang linear, ruang bernorma, ruang Banach, ruang Pre-Hilbert, dan ruang Hilbert. Ruang pre-Hilbert yang lengkap disebut ruang Hilbert. Pemetaan dari suatu ruang linear ke ruang linear yang lain atau dari suatu ruang linear ke ruang linear yang sama disebut operator. Diberikan ruang Hilbert  $X$  dan  $Y$  atas lapangan yang sama, yaitu  $F$ . Lapangan  $F$  yang dimaksud pada tulisan ini adalah  $\mathbb{R}$ . Operator  $T: X \rightarrow Y$  dikatakan *linear* jika untuk setiap  $x, y \in X$  dan  $\alpha \in F$  berlaku  $T(x+y) = T(x) + T(y)$  dan  $T(\alpha x) = \alpha T(x)$ . Operator linear  $T: X \rightarrow Y$  dikatakan *terbatas* jika terdapat konstanta  $M \geq 0$  sehingga  $\|T(x)\| \leq M \|x\|$  untuk setiap  $x \in X$ . Himpunan semua operator linear terbatas dari  $X$  ke  $Y$  ditulis  $B(X, Y)$ .

Lebih lanjut, dalam hal  $X = Y$ ,  $B(X, X)$  dituliskan  $B(X)$  atau  $B(Y)$ .

Untuk ruang Hilbert  $H$ , operator linear kontinu  $T$  yang memiliki sifat  $\|T(x) - T(y)\| = \|x - y\|$  untuk setiap  $x, y \in H$  disebut sebagai operator isometri. Hal tersebut ekuivalen dengan  $\|T(x)\| = \|x\|$ , untuk setiap  $x \in H$ . Kemudian, operator dengan sifat tersebut diperluas menjadi

$$\sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} (T^*)^{m-k} T^{m-k} = 0,$$

untuk suatu  $m \in \mathbb{N}$ .

Operator tersebut dinamakan operator isometri-  $m$ . Hal tersebut kemudian membawa pemikiran untuk menyelidiki karakteristik pada operator isometri dan isometri-  $m$ . Pembahasan mengenai karakteristik operator isometri dan isometri-  $m$  pada tulisan ini, lebih ditekankan pada memahami definisi, contoh, sifat-sifat aljabar, dan hubungan keduanya pada ruang Hilbert.

Rumusan masalah yang dibuat adalah bagaimana sifat-sifat serta hubungan antara operator isometri dan isometri- $m$ . Dalam penelitian ini hanya dibatasi pada ruang Hilbert. Tujuan penelitian ini adalah untuk memberikan pengetahuan mengenai sifat-sifat serta keterhubungan operator isometri dan operator isometri- $m$  pada ruang Hilbert. Pembahasan mengenai operator isometri dan isometri- $m$  pada ruang Hilbert bermanfaat membantu mengembangkan ilmu matematika dan aplikasinya, khususnya analisis fungsional.

Pembahasan tentang operator isometri pada ruang Hilbert diawali dengan pendefinisian operator adjoint kemudian dilanjutkan dengan pembahasan mengenai contoh dan sifat-sifat operator adjoint pada ruang Hilbert. Dalam pendefinisian operator adjoint diperlukan penjelasan mengenai Teorema Representasi Riesz. Untuk pembahasan tentang definisi operator adjoint dan sifatnya diacu dari buku Kreyszig (1978), Akhiezer, N.I. and Glazman, M. (2013), dan Berberian (1961). Selanjutnya, membahas operator isometri pada ruang Hilbert diacu dari buku Berberian (1961). Pembahasan mengenai operator isometri meliputi definisi, contoh, dan sifat-sifat aljabar. Kemudian definisi dan beberapa sifat operator isometri- $m$  pada ruang Hilbert diacu dari jurnal Saddi dan Ahmed (2010). Setelah itu, dilanjutkan membahas contoh dan sifat aljabar operator isometri- $m$  serta hubungan antara operator isometri dan operator isometri- $m$  pada ruang Hilbert.

## HASIL DAN PEMBAHASAN

Berikut ini akan disampaikan mengenai operator adjoint.

**Teorema 1 (Teorema Representasi Riesz).** (Kreyszig, 1978) Diketahui  $H$

ruang Hilbert. Jika  $T$  sebarang fungsional linear terbatas pada  $H$  maka terdapat dengan tunggal  $y \in H$  sehingga  $T(x) = \langle x, y \rangle, \forall x \in H$ .

**Bukti:** Diketahui  $T$  sebarang fungsional linear terbatas. Misalkan  $A = N(T) = \{x \in H : T(x) = 0\}$ .

Diperoleh  $A$  ruang bagian tertutup  $H$ . Karena  $A$  ruang bagian tertutup dari  $H$ , maka  $H = A \oplus A^\perp$ . Selanjutnya,

- 1) Jika  $T = O$  maka diambil  $y = \theta$  sehingga teorema terbukti.
- 2) Jika  $T \neq O$  maka  $A \neq H$ . Karena jika  $A = H$  maka untuk sebarang  $x \in H$  berakibat  $T = O$ . Oleh karena itu,  $A \neq H$  maka  $A^\perp \neq \{\theta\}$ . Jadi, dapat diambil  $z \in A^\perp \setminus \{\theta\}$ . Karena  $A \cap A^\perp = \{\theta\}$  maka  $T(z) \neq \theta$ . Dibentuk

$$y = \frac{\overline{T(z)} \cdot z}{\|z\|^2} \in A^\perp, \text{ diperoleh :}$$

$$\begin{aligned} \langle z, y \rangle &= \left\langle z, \frac{\overline{T(z)} \cdot z}{\|z\|^2} \right\rangle = \frac{T(z)}{\|z\|^2} \langle z, z \rangle \\ &= T(z) \end{aligned}$$

Untuk

$$y \in A^\perp, y \neq \theta \text{ maka } \langle y, y \rangle = T(y).$$

Untuk  $x \in H$ ,  $x$  dapat ditulis sebagai

$$x = \frac{T(x)}{T(y)} y + \left( x - \frac{T(x)}{T(y)} y \right),$$

dengan  $\left( x - \frac{T(x)}{T(y)} y \right) \in A$ , sebab

$$\left( x - \frac{T(x)}{T(y)} y \right) = T(x) - \frac{T(x)}{T(y)} T(y) = 0.$$

Karena  $\left( x - \frac{T(x)}{T(y)} y \right)$  orthogonal

terhadap  $y$ , maka :

$$\begin{aligned} \left\langle x - \frac{T(x)}{T(y)} y, y \right\rangle &= 0 \\ \Leftrightarrow \langle x, y \rangle - \left\langle \frac{T(x)}{T(y)} y, y \right\rangle &= 0 \\ \Leftrightarrow \langle x, y \rangle &= \frac{T(x)}{T(y)} \langle y, y \rangle \\ \Leftrightarrow \langle x, y \rangle &= T(x) \end{aligned}$$

Diperoleh  $T(x) = \langle x, y \rangle, \forall x \in H$ .

Selanjutnya akan dibuktikan  $y$  tunggal. Diambil sebarang  $y' \in H$  maka  $T(x) = \langle x, y' \rangle, \forall x \in H$ . Karena

$T(x) = \langle x, y \rangle$  maka untuk setiap  $x \in H$  diperoleh:

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle &= \langle x, y' \rangle \\ \Leftrightarrow \langle x, y \rangle - \langle x, y' \rangle &= 0 \\ \Leftrightarrow \langle x, y - y' \rangle &= 0 \\ \Leftrightarrow y - y' = 0 &\Rightarrow y = y' \end{aligned}$$

Jadi,  $y$  tunggal. Dengan demikian  $T(x) = \langle x, y \rangle, \forall x \in H$ .

**Teorema 2. (Kreyszig, 1978)** Diketahui  $H$  dan  $K$  ruang Hilbert. Untuk setiap  $T: H \rightarrow K$  operator linear kontinu, maka terdapat dengan tunggal operator linear kontinu  $T^*: K \rightarrow H$  sehingga untuk setiap  $x \in H$  dan  $y \in K$ , berakibat  $\langle T(x), y \rangle = \langle x, T^*(y) \rangle$ .

**Bukti:** Diambil sebarang  $T \in L_c(H, K)$  dan  $y \in K$ . Dibentuk fungsional  $\varphi_y$  pada  $H$  dengan  $\varphi_y(x) = \langle T(x), y \rangle, \forall x \in H$ . Fungsional  $\varphi_y$  merupakan fungsional linear kontinu pada  $H$  sebab:

- 1) Untuk setiap  $x_1, x_2 \in H$  dan skalar  $\alpha$  diperoleh:

$$\begin{aligned} \varphi_y(x_1 + x_2) &= \langle T(x_1 + x_2), y \rangle \\ &= \langle T(x_1), y \rangle + \langle T(x_2), y \rangle \\ &= \varphi_y(x_1) + \varphi_y(x_2) \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} \varphi_y(\alpha x_1) &= \langle T(\alpha x_1), y \rangle = \alpha \langle T(x_1), y \rangle \\ &= \alpha \varphi_y(x_1) \end{aligned}$$

- 2) Untuk setiap  $x \in H$  diperoleh:

$$\begin{aligned} |\varphi_y(x)| &= |\langle T(x), y \rangle| \leq \|T(x)\| \|y\| \\ &\leq \|T\| \|x\| \|y\| \end{aligned}$$

Karena untuk setiap  $y \in K, \varphi_y$  merupakan pemetaan linear kontinu pada  $H$  maka menurut Teorema 1, terdapat dengan tunggal  $y' \in H$  sehingga untuk setiap  $x \in H$  berlaku  $\varphi_y(x) = \langle x, y' \rangle$ . Berarti jelas bahwa untuk setiap  $y \in K$  menentukan dengan tunggal  $y' \in H$ . Jadi terdapat operator  $T^*: K \rightarrow H$  dengan  $T^*(y) = y', \forall y \in K$ . Oleh karena itu diperoleh :

$$\varphi_y(x) = \langle T(x), y \rangle = \langle x, y' \rangle = \langle x, T^*(y) \rangle$$

Jelas bahwa  $T^*$  tunggal. Selanjutnya operator  $T^*$  linear dan kontinu, sebab :

- 1) Untuk setiap

$y_1, y_2 \in K, x \in H$ , dan  $\alpha, \beta$  skalar diperoleh:

$$\begin{aligned} \langle x, T^*(\alpha y_1 + \beta y_2) \rangle &= \langle T(x), \alpha y_1 + \beta y_2 \rangle \\ &= \langle T(x), \alpha y_1 \rangle + \langle T(x), \beta y_2 \rangle \\ &= \alpha \langle T(x), y_1 \rangle + \beta \langle T(x), y_2 \rangle \\ &= \alpha \langle x, T^*(y_1) \rangle + \beta \langle x, T^*(y_2) \rangle \\ &= \langle x, \alpha T^*(y_1) \rangle + \langle x, \beta T^*(y_2) \rangle \end{aligned}$$

- 2) Untuk setiap  $x \in H$  diperoleh:

a. Jika  $x = \theta$  maka,

$$0 = \|T^*(\theta)\|^2 = \langle T^*(\theta), T^*(\theta) \rangle$$

$$= \langle \theta, TT^*(\theta) \rangle$$

$$\leq \|T\| \|\theta\| \|T^*(\theta)\| = 0.$$

Jika  $x \neq \theta$  maka,

$$\|T^*(x)\|^2 = \langle T^*(x), T^*(x) \rangle$$

$$= \langle x, TT^*(x) \rangle$$

$$\leq \|T\| \|x\| \|T^*(x)\|$$

$$\Leftrightarrow \|T^*(x)\| \leq \|T\| \|x\|.$$

Diambil  $M = \|T\|$ . Diperoleh  $M \geq 0$ , sehingga  $\|T^*(x)\| \leq M \|x\|$ . Jadi,  $T^*$  terbatas.

Dengan demikian, terbukti bahwa untuk setiap  $T \in L_c(H, K)$  terdapat dengan tunggal  $T^* \in L_c(K, H)$  sehingga:

$$\langle T(x), y \rangle = \langle x, T^*(y) \rangle, \forall x \in H \text{ dan } y \in K.$$

**Definisi 3. (Kreyszig, 1978)** Operator linear kontinu  $T^*$  seperti yang dijelaskan pada Teorema 2 disebut operator adjoint dari  $T$ .

Setelah disampaikan mengenai operator adjoint, berikut ini akan dibahas sifat- sifat operator adjoint pada ruang Hilbert.

**Teorema 4. (Kreyszig, 1978)** Diketahui  $H$  dan  $K$  ruang Hilbert. Jika  $S, T \in L_c(H, K)$  dan  $\lambda$  skalar, maka pernyataan- pernyataan berikut ini berlaku.

- a.  $(\lambda T)^* = \lambda^* T^*$
- b.  $(T^*)^* = T$

**Bukti:** Diambil sebarang  $x \in H$  dan  $y \in K$ ,

$$\begin{aligned} \langle (\lambda T)^*(x), y \rangle &= \langle x, (\lambda T)(y) \rangle \\ &= \langle x, \lambda T(y) \rangle = \langle \lambda^*(x), T(y) \rangle \\ &= \lambda^* \langle T^*(x), y \rangle = \langle \lambda^* T^*(x), y \rangle. \end{aligned}$$

Jadi,  $(\lambda T)^* = \lambda^* T^*$ .

**Teorema 5. (Akhiezer dan Glazman, 2013)** Diketahui  $H, K$ , dan  $L$  ruang Hilbert. Jika  $T \in B(H, K)$  dan  $S \in B(K, L)$  maka  $(ST)^* = T^* S^*$ .

**Bukti:** Diambil sebarang  $x \in H$  dan  $y \in K$ ,

$$\begin{aligned} \langle (ST)^*(x), y \rangle &= \langle x, (ST)(y) \rangle = \langle x, ST(y) \rangle \\ &= \langle S^*(x), T(y) \rangle \\ &= \langle T^* S^*(x), y \rangle. \end{aligned}$$

Jadi,  $(ST)^* = T^* S^*$ .

**Teorema 6. (Kreyszig, 1978)** Diketahui  $X$  dan  $Y$  ruang bernorma atas lapangan  $F$ . Jika  $T : X \rightarrow Y$  operator linear maka  $T(\theta) = \theta$ .

**Bukti:**  
 $T(\theta) = T(0x) = 0T(x) = \theta, \forall x \in X$ .

Selanjutnya, akan disampaikan mengenai operator isometri, contoh, dan sifat aljabarnya.

**Definisi 7. (Berberian, 1961)**

Diberikan  $H$  ruang Hilbert atas lapangan  $\mathbb{R}$  dan  $T \in B(H)$ . Operator  $T$  dikatakan isometri jika untuk setiap  $x, y \in H$ ,

$$\|T(x) - T(y)\| = \|x - y\|.$$

Hal tersebut ekuivalen dengan  $\|T(x)\| = \|x\|$ , untuk setiap  $x \in H$ .

**Contoh 8.**

Diberikan  $H$  ruang Hilbert klasik dan  $\{x_1, x_2, x_3, \dots\}$  basis ortonormal di  $H$ .

Didefinisikan operator  $T : H \rightarrow H$  dengan:

$$T(x_1, x_2, x_3, \dots) = x_{k+1}, x_k \in H,$$

untuk setiap  $k = 1, 2, 3, \dots$

Lebih lanjut, untuk setiap  $x \in H$  dengan

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k x_k \text{ diperoleh:}$$

$$T(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k x_{k+1},$$

$$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \dots\} \subseteq \square .$$

Akan ditunjukkan  $T$  linear dan isometri. Diambil sebarang

$$x, y \in H \text{ dengan } x = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k x_k \text{ dan } \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k y_k$$

a.  $T$  linear?

$$\begin{aligned} T(x+y) &= T\left(\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k x_k + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k y_k\right) \\ &= T\left(\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k (x_k + y_k)\right) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k (x_{k+1} + y_{k+1}) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k x_{k+1} + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k y_{k+1} \\ &= T(x) + T(y). \end{aligned}$$

Jadi,  $T$  linear.

b.  $T$  isometri? Diketahui  $\{x_1, x_2, x_3, \dots\}$  basis ortonormal di  $H$  artinya untuk setiap  $k \in \square$ ,  $x_k$  ortogonal dan  $\|x_k\| = 1$ .

$$\begin{aligned} \|T(x)\|^2 &= \left\| T\left(\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k x_k\right) \right\|^2 = \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k x_{k+1} \right\|^2 \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2 = \|x\|^2 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \|T(x)\| = \|x\|.$$

Jadi,  $T$  isometri.

### Teorema 9. (Berberian, 1961)

Diberikan  $H$  ruang Hilbert dan  $T \in B(H)$ . Pernyataan berikut ekuivalen:

- $T$  isometri
- $T^*T = I$ ,  
dengan  $I$  operator identitas pada ruang Hilbert
- $\langle T(x), T(y) \rangle = \langle x, y \rangle, \forall x, y \in H$ .

**Bukti:** Diambil sebarang  $x \in H$

( $a \Rightarrow b$ )

$$\begin{aligned} \langle T^*T(x), x \rangle &= \langle T(x), T(x) \rangle = \|T(x)\|^2 \\ &= \|x\|^2 = \langle x, x \rangle = \langle I(x), x \rangle. \end{aligned}$$

Jadi,  $T^*T = I$ .

( $b \Rightarrow c$ )

$$\langle T(x), T(y) \rangle = \langle T^*T(x), y \rangle = \langle I(x), y \rangle = \langle x, y \rangle.$$

( $c \Rightarrow a$ )

$$\begin{aligned} \|T(x)\|^2 &= \langle T(x), T(x) \rangle = \langle x, x \rangle = \|x\|^2 \\ \Leftrightarrow \|T(x)\| &= \|x\|. \text{ Jadi, } T \text{ isometri.} \end{aligned}$$

### Teorema 10. (Berberian, 1961)

Diberikan  $H$  ruang Hilbert dan  $T \in B(H)$ . Jika  $S, T$  isometri maka  $ST$  isometri.

**Bukti:** Diambil sebarang  $x \in H$ . Diketahui  $S, T$  isometri berarti

$$\|T(x)\| = \|x\| \text{ dan } \|S(x)\| = \|x\|.$$

Perhatikan bahwa,

$$\begin{aligned} \|(ST)(x)\|^2 &= \langle ST(x), ST(x) \rangle = \langle S^* ST(x), T(x) \rangle = \langle IT(x), T(x) \rangle = \langle T(x), T(x) \rangle \\ &= \|T(x)\|^2 = \|x\|^2 \\ \Leftrightarrow \|ST(x)\| &= \|x\| \end{aligned}$$

Jadi,  $ST$  isometri.

**Teorema 11.**

Diberikan  $H$  ruang Hilbert dan  $T \in B(H)$ . Jika  $T$  isometri maka  $\alpha T$  isometri untuk suatu  $\alpha \in \mathbb{C}$  dengan  $|\alpha| = 1$ .

**Bukti:** Diambil sebarang  $x \in H$ ,

$$\begin{aligned} \|\alpha T(x)\|^2 &= \langle \alpha T(x), \alpha T(x) \rangle \\ &= \langle \alpha^* \alpha T(x), T(x) \rangle \\ &= \alpha^* \alpha \langle T(x), T(x) \rangle \\ &= |\alpha|^2 \|T(x)\|^2 = |\alpha|^2 \|x\|^2 \\ \Leftrightarrow \|\alpha T(x)\| &= |\alpha| \|x\| \\ \Leftrightarrow \|\alpha T(x)\| &= \|x\| \end{aligned}$$

Jadi,  $(\alpha T)$  isometri.

**Definisi 12. (Berberian, 1961).**

Diberikan  $H$  ruang Hilbert dan  $S, T \in B(H)$ . Operator  $S, T$  dikatakan ekuivalen secara metrik jika  $\|S(x)\| = \|T(x)\|, \forall x \in H$ .

**Teorema 13. (Berberian, 1961)**

Diberikan  $H$  ruang Hilbert dan  $S, T \in B(H)$ .

$S, T$  ekuivalen secara metrik jika dan hanya jika  $S^* S = T^* T$ .

**Bukti:**

Diambil sebarang  $x \in H$

( $\Leftarrow$ )

$$\begin{aligned} \langle S^* S(x), x \rangle &= \langle S(x), S(x) \rangle = \|S(x)\|^2. \\ \langle T^* T(x), x \rangle &= \langle T(x), T(x) \rangle = \|T(x)\|^2. \end{aligned}$$

Karena  $S^* S = T^* T$  maka  $\|T(x)\|^2 = \|S(x)\|^2 \Rightarrow \|T(x)\| = \|S(x)\|$ .

Dengan demikian,  $S, T$  ekuivalen secara metrik.

( $\Rightarrow$ )

Diketahui  $S, T$  ekuivalen secara metrik berarti  $\|T(x)\| = \|S(x)\|, \forall x \in H$ .

$$\begin{aligned} \langle S^* S(x), x \rangle &= \langle S(x), S(x) \rangle = \|S(x)\|^2 = \|T(x)\|^2 \\ &= \langle T(x), T(x) \rangle = \langle T^* T(x), x \rangle. \end{aligned}$$

Jadi,  $S^* S = T^* T$

**Definisi 14. (Saddi dan Ahmed, 2010)**

Diberikan ruang Hilbert  $H$  atas lapangan  $\mathbb{C}$  dan  $T \in B(H)$ . Operator  $T$  dikatakan isometri- $m$  jika

$$\sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} (T^*)^{m-k} T^{m-k} = 0, \text{ untuk suatu } m \in \mathbb{N}.$$

**Contoh 15.**

Diberikan  $H = \mathbb{C}^2$  dan  $T: H \rightarrow H$

dengan  $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Akan ditunjukkan

$T$  merupakan operator isometri-2?

**Jawab:** Perhatikan bahwa:

$$\begin{aligned}
 T^* &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ dan} \\
 \sum_{k=0}^2 (-1)^k \binom{2}{k} (T^*)^{2-k} T^{2-k} \\
 &= T^{*2} T^2 - 2T^* T + I \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \\
 &\quad 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

= O, dengan  $I$  operator identitas dan  $O$  operator nol.

Jadi,  $T$  merupakan operator isometri- 2.

**Teorema 16.**

Diberikan  $T \in B(H)$  dan  $H$  ruang Hilbert. Jika  $T$  isometri maka  $T$  isometri-  $m$ , untuk suatu  $m \in \mathbb{N}$ .

**Teorema 17.**

Diberikan  $T \in B(H)$  dan  $H$  ruang Hilbert. Untuk suatu  $m \in \mathbb{N}$ , jika  $S, T$  isometri dan  $S = T$ , maka  $ST$  isometri-  $m$ .

**Bukti:** Diambil sebarang  $x \in H$ . Untuk suatu  $m \in \mathbb{N}$

1. Jika  $m$  ganjil maka

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} ((ST)^*)^{m-k} (ST)^{m-k} \\
 &= \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} (T^* S^*)^{m-k} (ST)^{m-k} \\
 &= \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} (T^*)^{m-k} (S^*)^{m-k} S^{m-k} T^{m-k} \\
 &= \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} (T^*)^{m-k} IT^{m-k} \\
 &= \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} (T^*)^{m-k} T^{m-k} \\
 &= \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} I \\
 &= I - \binom{m}{1} I + \binom{m}{2} I - \binom{m}{3} I + \dots - I \\
 &= O, O \text{ operator nol.}
 \end{aligned}$$

2. Jika  $m$  genap maka

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} ((ST)^*)^{m-k} (ST)^{m-k} \\
 &= \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} (T^* S^*)^{m-k} (ST)^{m-k} \\
 &= \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} (T^*)^{m-k} (S^*)^{m-k} S^{m-k} T^{m-k} \\
 &= \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} (T^*)^{m-k} IT^{m-k} \\
 &= \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} (T^*)^{m-k} T^{m-k} \\
 &= \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} I \\
 &= I - \binom{m}{1} I + \binom{m}{2} I - \binom{m}{3} I + \dots + I \\
 &= O, O \text{ operator nol.} \\
 &\text{Berdasarkan 1 dan 2, diperoleh} \\
 &\text{ST isometri- } m.
 \end{aligned}$$

**Teorema 18.**

Diberikan  $T \in B(H)$  dan  $H$  ruang Hilbert. Jika  $T$  isometri-  $m$ , maka  $(\alpha T)$  isometri-  $m$  untuk suatu  $\alpha \in \mathbb{C}$  dengan  $|\alpha| = 1$ .

**Bukti:** Perhatikan bahwa:

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} ((\alpha T)^*)^{m-k} (\alpha T)^{m-k} \\
 &= \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} (\alpha^* T^*)^{m-k} (\alpha T)^{m-k} \\
 &= \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} \alpha^* (T^*)^{m-k} \alpha T^{m-k} \\
 &= \alpha^* \alpha \left( \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} (T^*)^{m-k} T^{m-k} \right) \\
 &= \alpha^* \alpha O = O, O \text{ operator nol.} \\
 &\text{Jadi, } (\alpha T) \text{ isometri- } m.
 \end{aligned}$$

**Teorema 19.**

Diberikan  $T \in B(H)$  dan  $H$  ruang Hilbert. Jika  $T$  isometri dan  $T^* = I$ , maka  $T^*T = TT^*$ .

**Bukti:** Diambil sebarang  $x \in H$

$$\begin{aligned} \langle T^*T(x), x \rangle &= \langle T(x), T(x) \rangle = \|T(x)\|^2 \\ &= \|x\|^2 = \langle x, x \rangle = \langle I(x), x \rangle \end{aligned}$$

Jadi,  $T^*T = I$ .....1)

$$\begin{aligned} \langle TT^*(x), x \rangle &= \langle T^*(x), T^*(x) \rangle = \|T^*(x)\|^2 \\ &= \|I(x)\|^2 = \langle I(x), I(x) \rangle \\ &= \langle I(x), x \rangle \end{aligned}$$

Jadi,  $TT^* = I$ .....2)

Berdasarkan 1) dan 2), diperoleh  $TT^* = T^*T$ .

**Teorema 20.**

Diberikan  $T \in B(H)$  dan  $H$  ruang Hilbert. Jika  $T$  isometri-  $m$  dan  $T^*T = TT^*$ , maka  $T$  isometri-  $(m + n)$  untuk setiap  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

**Bukti:** Diambil  $n = 1$  dan berdasarkan Teorema 11 diperoleh,

$$\begin{aligned} &\sum_{k=0}^{m+1} (-1)^k \binom{m+1}{k} (T^*)^{m+1-k} T^{m+1-k} \\ &= \sum_{k=0}^{m+1} (-1)^k \binom{m+1}{k} (T^*)^{1+m-k} T^{1+m-k} \\ &= \sum_{k=0}^{m+1} (-1)^k \binom{m+1}{k} T^* (T^*)^{m-k} T T^{m-k} \\ &= \sum_{k=0}^{m+1} (-1)^k \binom{m+1}{k} T^* T (T^*)^{m-k} T^{m-k} \\ &= T^* T \sum_{k=0}^{m+1} (-1)^k \binom{m+1}{k} (T^*)^{m-k} T^{m-k} \\ &= T^* T \cdot O = O, \quad O \text{ operator nol.} \end{aligned}$$

Jadi,  $T$  isometri-  $(m + 1)$ .

**Dengan cara yang sama, diperoleh  $T$  isometri-  $(m + n)$  untuk setiap  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$**

**KESIMPULAN DAN SARAN**

Berdasarkan pembahasan di atas, kesimpulan yang dapat diambil adalah contoh dan sifat- sifat aljabar masing- masing operator isometri dan operator isometri-  $m$  diantaranya sifat komposisi operator dan perkalian dengan skalar. Selain itu, apabila  $T$  operator isometri maka  $T$  operator isometri-  $m$ , untuk suatu  $m \in \mathbb{N}$ .

Dalam tulisan ini, hanya dibahas mengenai sifat-sifat operator isometri dan isometri-  $m$  beserta hubungannya pada ruang Hilbert. Untuk penelitian selanjutnya, dapat diselidiki karakteristik spektrum operator isometri maupun operator isometri-  $m$  pada ruang Hilbert.

**DAFTAR PUSTAKA**

Akhiezer, N.I. and Glazman, M. 2013. *Theory of Linear Operators in Hilbert Spaces*. New York: Dover Publication, Inc.

Berberian, S.K.1961. *Introduction to Hilbert Spaces*. New York: Oxford University Press.

Kreyszig, E.1978. *Introductory Functional Analysis with Applications*. New York: John Wiley and Sons.

Saddi, Adel and Ould Ahmed Mahmoud Sid Ahmed . 2010. *m- Partial Isometries On Hilbert Spaces. Internat J. Functional Analysis, Operator Theory, and Applications* . Volume 2, No 1, Pages 67-83, 7 September. Dapat diakses di <http://pphmj.com/journals/ijaota.htm>.