

## MODIFIKASI DISTRIBUSI MASSA PADA SUATU OBJEK SIMETRI BOLA

**Yuant Tiandho**

Jurusan Fisika, Universitas Bangka Belitung  
Email: [yuanttiandho@gmail.com](mailto:yuanttiandho@gmail.com)

### Abstrak

Umumnya, untuk menggambarkan distribusi massa sebagai fungsi ruang dilakukan pemisahan untuk kondisi di luar dan di dalam objek. Di dalam makalah ini, kami mengusulkan suatu distribusi massa yang berlaku pada kedua kondisi tersebut sehingga tidak perlu dilakukan pemisahan. Jika fungsi tersebut digunakan dalam proses komputasi atau simulasi diharapkan dapat memperingkas algoritma. Fungsi distribusi massa diturunkan berdasarkan fungsi distribusi Fermi-Dirac untuk faktor Boltzman yang bernilai sangat kecil. Adapun objek yang ditinjau adalah objek yang memenuhi sifat simetri bola tetapi tidak menutup kemungkinan dapat diperluas pada sebarang bentuk objek. Melalui fungsi distribusi massa tersebut dapat diturunkan gaya gravitasi, medan gravitasi, dan potensial gravitasi pada sebarang titik tinjau yang bernilai sama dengan tinjauan konvensional. Dengan analogi gaya gravitasi dan elektrostatik maka fungsi distribusi massa tersebut juga dapat diperluas untuk distribusi muatan listrik.

**Kata Kunci:** Gravitasi, Elektrostatik, Mekanika klasik.

### PENDAHULUAN

Sejauh ini, fisikawan meyakini bahwa alam semesta disusun oleh empat gaya fundamental: gravitasi, elektromagnetik, nuklir lemah, dan nuklir kuat (Ciufolini, Dkk, 2013). Diantara gaya-gaya tersebut, gaya gravitasi merupakan interaksi yang sudah sejak lama dipelajari. Ketertarikan pada pergerakan benda-benda langit, pasang surut air laut,

serta gerak jatuh suatu benda adalah beberapa alasan untuk mempelajarinya.

Robert Hooke adalah ilmuwan era Newton yang mengusulkan hukum gravitasi (Gregory, 2006),

$$F = -\frac{GMm}{r^2}, \quad (1)$$

dimana G adalah suatu konstanta gravitasi yang nilainya pertama kali ditentukan oleh Cavendish pada 1798 (Giancoli, 2014). Gravitasi

digambarkan sebagai gaya tarik-menarik (ditandai oleh tanda minus) antara dua objek bermassa dan nilainya berbanding terbalik dengan kuadrat jarak antara keduanya. Dengan menggunakan hukum gravitasi tersebut, Newton dapat menjelaskan pergerakan benda planet sesuai hukum Kepler dengan sangat baik. Meski saat ini teori relativitas umum Einstein dapat lebih akurat menjelaskan gravitasi namun hukum gravitasi klasik tersebut masih dapat digunakan untuk menjelaskan berbagai fenomena dengan sangat teliti.

Teori gravitasi yang diusulkan oleh Hooke atau juga sering disebut sebagai gaya gravitasi Newton merupakan salah satu materi pokok yang dipelajari pada mekanika klasik dan fisika dasar. Untuk tinjauan gravitasi dengan objek berdimensi titik, secara umum tidak ditemui kendala yang berarti. Namun untuk tinjauan dengan objek berdimensi (misal bola) seringkali pembahasan gravitasi harus dilakukan pemisahan untuk daerah di dalam objek dan di luar objek (Young dan Freedman, 2012). Penerapan gravitasi di luar

objek dapat diselesaikan secara langsung dengan menggunakan massa total, sedangkan untuk bagian dalam objek digunakan persamaan Poisson atau persamaan Gauss untuk gravitasi sesuai dengan massa yang dilingkupi. Selain itu, dalam mendeskripsikan massa juga dilakukan pemisahan. Misalkan untuk objek bola padat, massa selalu dinyatakan dalam dua kondisi sesuai dengan titik tinjau  $r$ ,

$$M(r) \begin{cases} \frac{4}{3} \pi \rho r^3, & \text{untuk } r < R \\ M, & \text{untuk } r \geq R \end{cases} \quad (2)$$

dimana  $R$  adalah radius objek dan  $M$  adalah massa totalnya.

Sistematika penulisan makalah ini adalah sebagai berikut, pada Bagian 2 kami mengusulkan sebuah persamaan distribusi massa yang berlaku untuk kondisi di dalam dan di luar objek. Dengan demikian, deskripsi massa secara umum dapat ditunjukkan oleh sebuah kondisi tunggal tidak seperti pada pers. (2). Pada Bagian 3, kami menggunakan fungsi distribusi massa tersebut untuk memperoleh parameter dalam mekanika seperti gaya, medan, dan potensial gravitasi. Hasil yang diperoleh menunjukkan bahwa dengan fungsi distribusi massa yang

kami gunakan memiliki nilai yang sama dengan hasil perhitungan konvensional. Pada Bagian 4, fungsi distribusi massa diperluas untuk kasus kulit bola. Fungsi distribusi muatan tersebut juga dapat diterapkan untuk mempelajari perhitungan elektrostatis

### **FUNGSI DISTRIBUSI MASSA**

Untuk memperoleh fungsi distribusi massa yang berlaku di seluruh kondisi kami mencoba beberapa fungsi yang diperkirakan memiliki bentuk yang sesuai dan akhirnya dipilih fungsi distribusi Fermi-Dirac dalam mekanika statistik (Troy, 2012)

$$f(\varepsilon) = \frac{1}{\exp\left[\frac{\varepsilon - \mu}{kT}\right] + 1} \quad (3)$$

Hal yang menarik dari fungsi distribusi Fermi-Dirac adalah dapat diperoleh suatu grafik dengan tingkat perubahan yang cukup drastis apabila faktor  $kT$  dalam eksponensial bernilai kecil (Kittel, 2005). Sifat itulah yang kelak dibutuhkan untuk menggambarkan distribusi massa suatu objek.

Dengan memodifikasi fungsi distribusi Fermi-Dirac pada pers. (3) maka kami mengusulkan bahwa fungsi distribusi massa memiliki bentuk,

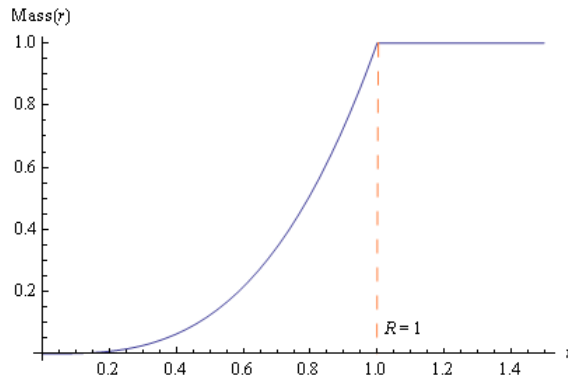
$$M(r) = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \left( \frac{4\pi\rho r^3}{3(1 + \exp[\alpha(r-R)])} + \frac{M_R}{1 + \exp[\alpha(R-r)]} \right) \quad (4)$$

dimana  $M(r)$  adalah massa pada titik tinjau  $r$ ,  $\rho$  adalah massa jenis objek,  $R$  adalah radius objek, dan  $M_R$  adalah massa pada titik tinjau  $R$  atau massa totalnya. Pemilihan nilai  $\alpha$  sebagai limit tak hingga bertujuan untuk memperoleh nilai massa seperti yang diharapkan dan analogi dengan faktor  $kT$  pada persamaan Fermi-Dirac yang bernilai sangat kecil. Suku pertama dalam fungsi distribusi massa tersebut menggambarkan kondisi untuk daerah  $r < R$  dan akan lenyap pada daerah  $r = R$ . Sebaliknya, pada daerah  $r > R$  massa objek diberikan oleh suku yang kedua. Dengan demikian, kondisi di dalam dan di luar objek bermassa dapat didefinisikan oleh satu bentuk fungsi distribusi massa saja.

Pada objek dengan  $M_R = 1$ ,  $R = 1$ , dan  $\rho = 3/(4\pi)$ , distribusi massanya

diberikan oleh Gambar 1. Pada kurva tersebut tampak bahwa untuk daerah , massa objek bertambah seiring jarak tinjau  $r$  dan untuk daerah tampak bahwa massa objek bernilai konstan.

Hal ini sesuai dengan kondisi massa pada pers. (2) yang memisahkan definisi massa untuk daerah dan daerah .



**Gambar 1.** Fungsi distribusi massa suatu objek dengan massa  $M_R = 1$  dan radius  $R = 1$ .

## MEKANIKA GRAVITASI

Mekanika gravitasi sangat erat hubungannya dengan gaya gravitasi, medan gravitasi, dan potensial gravitasi. Persoalan itulah yang menjadi acuan utama dalam mempelajari teori gravitasi klasik. Pada umumnya, untuk menentukan gaya gravitasi suatu objek bermassa pada sebarang titik, selalu dibutuhkan definisi apakah titik tinjau berada di dalam objek atau di bagian luarnya. Apabila tinjauan berada pada bagian luar, maka gaya gravitasi dapat ditentukan dengan mudah sesuai pers. (1), tetapi jika tinjauan dilakukan

pada bagian dalam, maka gaya gravitasi dengan massa uji  $m$  diberikan oleh,

$$F = -\left(G\rho\frac{4\pi m}{3}\right)r \quad (5)$$

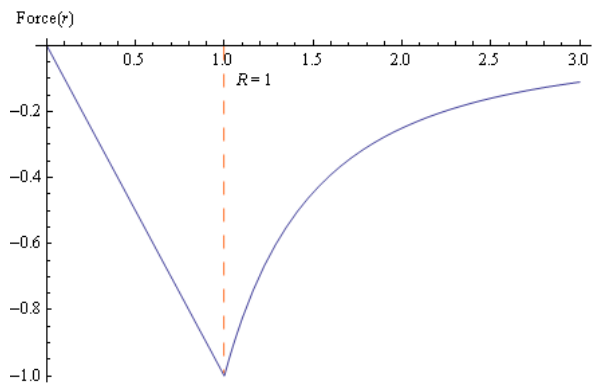
Suku dalam kurung adalah sebuah konstanta. Sehingga gaya di daerah tersebut sebanding dengan pergeseran  $r$  secara linier dan analogi dengan gerak harmonik sederhana.

Sebagai perbandingan, apabila diterapkan distribusi massa secara umum seperti pada pers. (4), maka hanya dibutuhkan sebuah persamaan gaya yang berlaku untuk semua daerah,

$$F(r) = -\frac{Gm}{r^2} \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \left( \frac{4\pi\rho r^3}{3(1+\exp[\alpha(r-R)])} + \frac{M_R}{1+\exp[\alpha(R-r)]} \right) \quad (6)$$

Pada daerah suku kedua dalam pers. (6) akan lenyap dan hanya tersisa suku pertama saja tetapi sebaliknya, pada daerah suku pertama akan lenyap dan hanya tersisa suku kedua saja. Adapun grafik gaya terhadap sebarang titik tinjau  $r$  untuk suatu objek dengan  $M_R = 1$ ,  $R = 1$ , muatan uji  $m = 1$  dan

didefinisikan konstanta  $G = 1$  menggunakan pers. (6), dapat dilihat pada Gambar 2. Tampak dengan jelas bahwa untuk gaya gravitasi akan meningkat secara linier terhadap  $r$  dan ketika , gaya gravitasi menurun secara kuadrat seiring dengan penambahan  $r$ .



**Gambar 2.** Grafik gaya terhadap titik tinjau  $r$  dengan massa  $M_R = 1$ , radius  $R = 1$ , dan massa uji  $m = 1$ .

Untuk memperoleh nilai medan gravitasi dapat dilakukan dengan

menggunakan hubungan antara medan gravitasi dan gaya gravitasi,

$$g(r) = -\frac{G}{r^2} \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \left( \frac{4\pi\rho r^3}{3(1+\exp[\alpha(r-R)])} + \frac{M_R}{1+\exp[\alpha(R-r)]} \right) \quad (7)$$

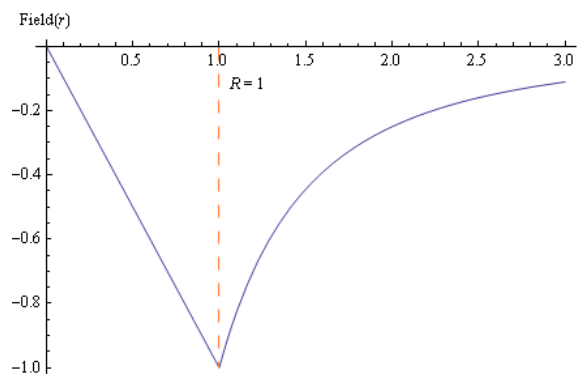
Dari hubungan tersebut dapat dibentuk grafik medan gravitasi

terhadap sebarang titik tinjau seperti pada Gambar 3. Sama seperti gaya

gravitasi, medan gravitasi juga akan meningkat secara linier pada daerah dan akan meluruh secara kuadratis untuk daerah. Secara ringkas, berdasarkan perbandingan antara nilai  $r$  dan  $R$  dalam pers. (7) dapat diperoleh nilai persamaan medan gravitasi sebagai,

$$g(r) = \begin{cases} -\left(\frac{4\pi G\rho}{3}\right)r, & \text{untuk } r < R \\ -\frac{GM_R}{r^2}, & \text{untuk } r \geq R \end{cases} \quad (8)$$

dan hasil tersebut sesuai dengan hasil yang diperoleh melalui persamaan Gauss untuk gravitasi.



**Gambar 3.** Grafik medan gravitasi terhadap titik tinjau  $r$  dengan massa  $M_R = 1$ , radius  $R = 1$ .

Gambar 3. Grafik medan gravitasi terhadap titik tinjau  $r$  dengan massa  $M_R = 1$ , radius  $R = 1$ .

Potensial gravitasi didefinisikan,

$$V(r) = -\int_{\infty}^r g \, dr \quad (9)$$

Integrasi tersebut lebih mudah dilakukan apabila diketahui daerah mana yang ingin ditentukan potensialnya. Pada daerah dapat digunakan medan gravitasi sesuai pers. (8). Dengan sedikit memanipulasi batas integrasi maka

pers. (9) dapat dituliskan sebagai,

$$V_{dalam} = -\left\{ \int_{\infty}^R g_{luar} \, dr + \int_R^r g_{dalam} \, dr \right\} \quad (10)$$

$$= -\frac{GM_R}{2R^3} (3R^2 - r^2)$$

Sedangkan untuk daerah luar, potensial gravitasi dapat ditentukan sebagai,

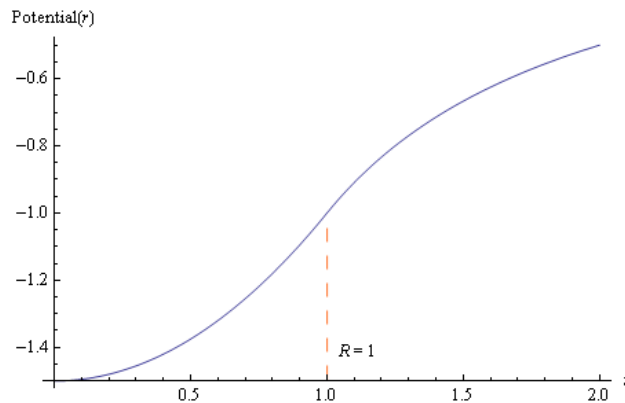
$$V_{luar} = \int_{\infty}^r \frac{GM_R}{r^2} \, dr \quad (11)$$

$$= -\frac{GM_R}{r}$$

Kedua hasil potensial gravitasi yang diperoleh sesuai dengan metode pada umumnya. Bentuk plot grafik

potensial pada sebarang titik tinjau ditunjukkan oleh Gambar 4. Tampak bahwa untuk tinjauan setelah melewati radius objek, dalam hal ini  $R = 1$ , terjadi perubahan bentuk kurva dari yang awalnya kuadratik menjadi

berbanding terbalik dengan titik tinjau. Tentu saja hal ini terjadi akibat distribusi potensial yang berbeda antara potensial di dalam objek dengan potensial di luar objek.



**Gambar 4.** Grafik potensial gravitasi terhadap titik tinjau  $r$ ,  $M_R = 1$ , dan radius  $R = 1$

### KASUS PADA KULIT BOLA

Pembahasan yang telah dilakukan pada Bagian 2 dan 3 mengasumsikan objek yang ditinjau memiliki bentuk berupa bola padat dengan rapat massa bernilai konstan. Lalu bagaimana untuk objek yang memiliki bentuk serupa kulit bola? Bentuk ini menarik karena dengan melakukan tinjauan pada kasus ini dapat disusun sebuah model untuk distribusi muatan pada konduktor. Karena seperti diketahui, muatan konduktor hanya tersebar pada bagian permukaannya saja. Dengan demikian, diharapkan

persamaan fungsi distribusi massa tidak hanya berlaku untuk massa saja melainkan dapat diperluas untuk objek bermuatan.

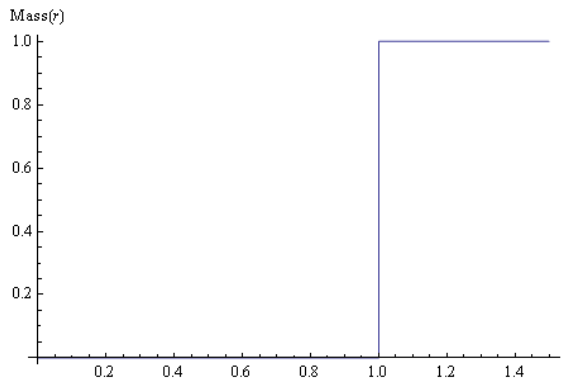
Apabila massa atau muatan hanya tersebar pada bagian permukaan bola maka massa jenis di dalam  $\rho = 0$ . Sehingga fungsi distribusi massa mereduksi menjadi suku keduanya saja.

$$M(r) = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \left( \frac{M_R}{1 + \exp[\alpha(R-r)]} \right) \quad (12)$$

Adapun grafik distribusi massanya ditunjukkan oleh Gambar 5. Pada

grafik tersebut tampak bahwa untuk daerah massa bernilai nol dan secara signifikan meningkat pada radius

benda kemudian untuk bernilai konstan.



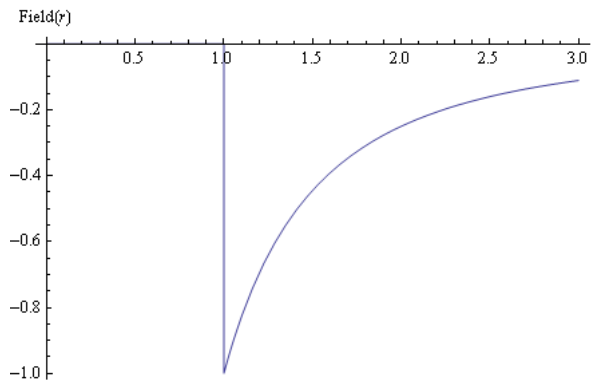
**Gambar 5.** Grafik distribusi massa kulit bola terhadap titik tinjau  $r$  dengan massa  $M_R = 1$ , radius  $R = 1$ .

Adapun medan gravitasi pada kulit bola adalah,

$$E(r) = -\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \left( \frac{GM_R}{(1 + \exp[\alpha(R-r)])r^2} \right) \quad (13)$$

dan plot grafiknya dapat dilihat pada Gambar 6. Melalui hasil tersebut

tampak dengan jelas bahwa medan gravitasi di dalam kulit bola bernilai nol. Dengan kata lain, gaya gravitasi di dalam kulit bola juga bernilai nol. Medan gravitasi mulai muncul dipermukaan atau di radius bola dan menurun secara kuadratik setelahnya.

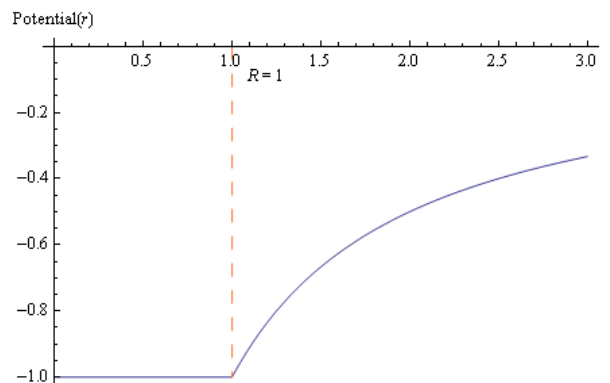


**Gambar 6.** Grafik medan gravitasi kulit bola terhadap titik tinjau  $r$  dengan massa  $M_R = 1$ , radius  $R = 1$ .

Karena medan gravitasi dalam kulit bola adalah nol maka dari pers. (9) dapat dinyatakan bahwa potensial gravitasi di dalam kulit bola bernilai konstan. Potensial gravitasi di daerah dapat ditentukan dengan menggunakan pers. (13) dan diperoleh hasil yang sama dengan pers. (11). Melalui nilai potensial gravitasi pada permukaan kulit bola maka dapat ditentukan potensial di dalam kulit bola sebagai,

$$V_{dalam} = -\frac{GM_R}{R} \quad (14)$$

dan grafik potensial pada sebarang titik tinjau untuk kulit bola diberikan oleh Gambar 7.



**Gambar 7.** Grafik potensial gravitasi kulit bola terhadap titik tinjau r dengan massa  $MR = 1$ , radius  $R = 1$ .

**KESIMPULAN**

Dengan melakukan modifikasi fungsi distribusi Fermi-Dirac dapat diturunkan fungsi distribusi massa

Dari hasil-hasil yang telah kami peroleh mulai dari fungsi distribusi massa untuk bola padat hingga kulit bola semuanya sesuai dengan yang tercantum pada buku-buku mekanika klasik dan fisika dasar [2, 3, 4, 5, 8]. Selain itu, dengan membandingkan hasil yang pada Gambar 5, 6, dan 7 dengan distribusi muatan, medan listrik, dan potensial listrik pada bola konduktor (Griffiths, 1999), maka dapat dinyatakan bahwa fungsi distribusi massa yang kami peroleh juga dapat digunakan untuk mempelajari listrik statis.

yang berlaku untuk daerah di dalam objek dan di luar objek. Penggunaannya dalam mekanika gravitasi seperti untuk menentukan

gaya gravitasi, medan gravitasi, dan potensial gravitasi menunjukkan bahwa hasil tersebut sesuai dengan referensi. Tinjauan pada kulit bola juga memperoleh hasil yang memuaskan sehingga fungsi distribusi massa tersebut dapat diaplikasikan untuk menggambarkan distribusi muatan pada konduktor.

#### **DAFTAR PUSTAKA**

- Ciufolini, I, dkk. 2013. "Fundamental physics and general relativity with the LARES and LAGEOS satellites," *Nuclear Physics B*, vol. 243, pp. 180-193.
- Giancoli, D. C. 2014. *Physics Principles with Applications*, USA: Pearson Education, Inc.
- Gregory, R. D. 2006 *Classical Mechanics*, New York: Cambridge University Press.
- Griffiths, D. J. 1999. *Introduction to Electrodynamics*, New Jersey: Prentice-Hall, Inc.
- Kittel, C. 2005. *Introduction to Solid State Physics*, USA: John Wiley & Sons, Inc.
- Troy, W. C. 2012. "Low temperature properties of the Fermi-Dirac, Boltzmann and Bose-Einstein equations," *Physics Letters A*, vol. 376, pp. 2887-2893.
- Young, H. D. dan Freedman, R. A. 2012. *Sears and Zemansky's University Physics: with Modern Physics*, San Francisco: Addison-Wesley